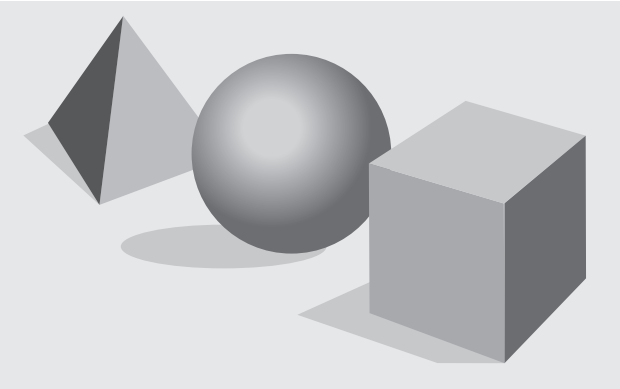
GEOMETRÍA DEL ESPACIO

La geometría del espacio es la rama de la geometría que se encarga del estudio de las figuras geométricas que ocupan un lugar en el espacio: estudia las propiedades y medidas de las figuras geométricas en el espacio tridimensional o espacio euclídeo.



Clases de cuerpos sólidos

Estos cuerpos pueden ser de dos clases:

- **Poliedros**, sólidos que tienen todas las caras planas. Ejemplos:

  Sólidos platónicos.

  Prismas

  Pirámides

- **No poliedros o cuerpos redondos**, aquellos sólidos que tienen al menos una cara de superficie curva. Ejemplos:

  Esferas

  Cilindros

  Conos

Propiedades

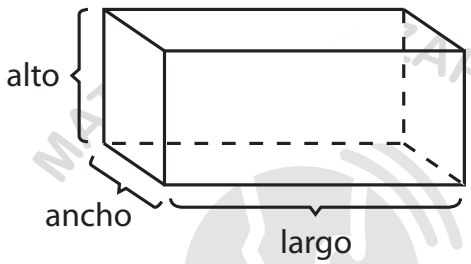
Los sólidos tienen propiedades como: **volumen** y **área de la superficie.**

Asimismo, los cuerpos que están huecos pueden albergar en su interior otros cuerpos en una cantidad que recibe el nombre de capacidad. Existe una relación directa entre la capacidad de un cuerpo y el volumen que este ocupa.

El mundo que nos rodea está lleno de objetos. Muchas veces observamos la presencia de estos, pero no percibimos sus formas geométricas.

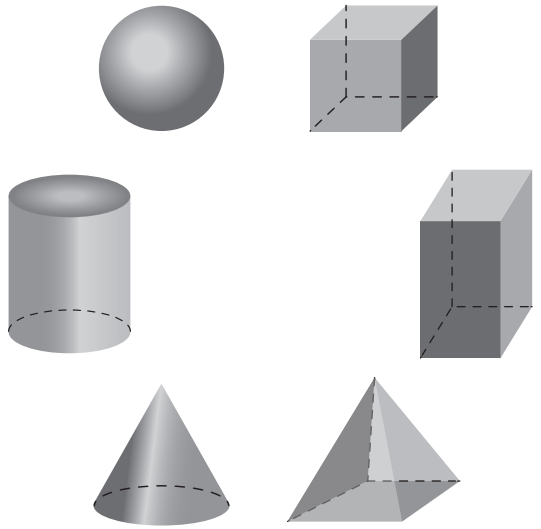
El libro que estamos estudiando, un vaso, un lápiz y otros objetos, tan corrientes y comunes, están diseñados a base de figuras sólidas de la geometría.

Todos los objetos que nos rodean son cuerpos geométricos y corresponden a unas figuras geométricas tridimensionales, es decir, que se proyectan en tres dimensiones: largo, ancho y alto.



Anteriormente estudiamos las figuras planas, aquellas que tienen dos dimensiones, es decir, no tiene espesor, y todas sus partes están en un mismo plano.

Por el contrario, un sólido geométrico o figura del espacio es una figura tridimensional que tiene "espesor" y sus partes están en distintos planos.



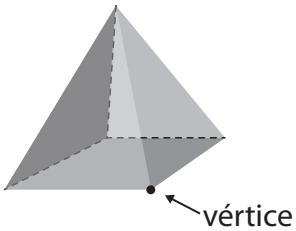
Anteriormente en el libro de Matemática Ujarrás 2016, estudiamos en la semana novena la descripción, los tipos y las características de los sólidos.

Se hará un breve repaso de los conceptos de visualización espacial más sobresalientes y que serán fundamentales para el desarrollo de la geometría del espacio a desarrollar en este libro de Matemática Zapandí.

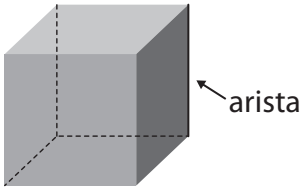
Un poliedro es un cuerpo geométrico de tres dimensiones cuya cara son polígonos.

En un poliedro distinguimos:

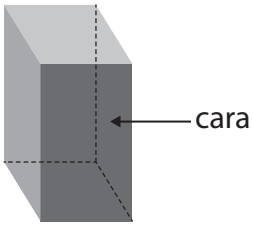
- **Vértices**: puntos donde concurren tres aristas.



- **Aristas**: lados de los polígonos regulares.



- **Caras**: polígonos regulares.



Además podemos fijarnos en:

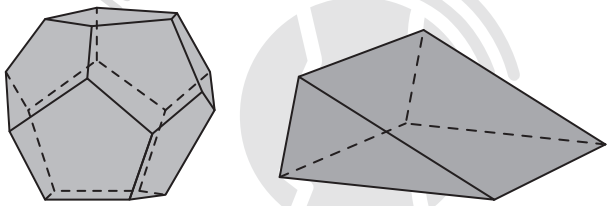
- **Ángulos planos:** cuyos lados son dos aristas convergentes o unidas.
- **Ángulos diédricos:** cuyas caras son dos polígonos adyacentes.
- **Ángulos triédricos:** formados por tres caras convergentes o unidas en un vértice.

Tipos de poliedros

Los poliedros se pueden clasificar mediante dos criterios:

Según su **regularidad**:

- **Regulares**: un poliedro regular es aquel que sus caras son poliedros regulares y son todos iguales. Todos los ángulos poliedros también son iguales.
- **Irregulares**: Poliedro cuyas caras son polígonos no todos iguales.



Poliedro regular Poliedro irregular

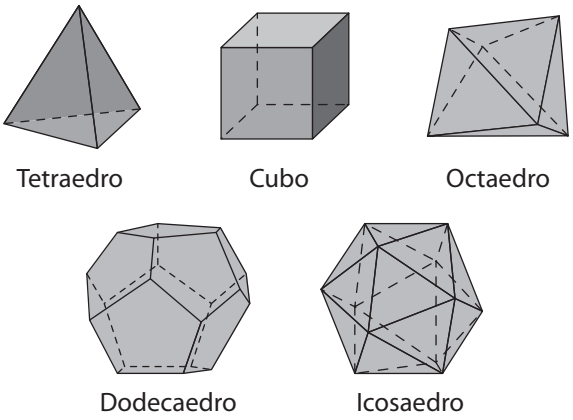
Tipos de poliedros regulares

Un **poliedro regular** es aquel que sus **caras** son **polígonos regulares** y son todas **iguales**.

MATEMÁTICA ZAPANDÍ
ICER
CONVENIO MEP ICER

Las aristas también son todas iguales. Existen solo **cinco tipos** de poliedros regulares:

- **Tetraedro regular:** poliedro regular cuya superficie está formada por cuatro triángulos equiláteros iguales.
- **Cubo (o hexaedro regular):** poliedro regular compuesto por seis cuadrados iguales.
- **Octaedro regular:** poliedro regular cuya superficie está constituida por ocho triángulos equiláteros iguales.
- **Dodecaedro regular:** poliedro regular formado por doce pentágonos regulares iguales.
- **Icosaedro regular:** poliedro regular las caras del cual son veinte triángulos equiláteros iguales.

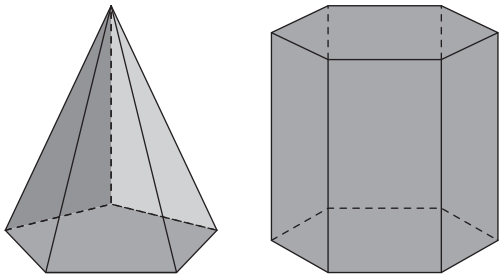


Tipos de poliedros irregulares

Los **poliedros irregulares** son poliedros cuyas **caras** son **polígonos no todos iguales**. Principalmente se clasifican por el número de caras que tiene su superficie:

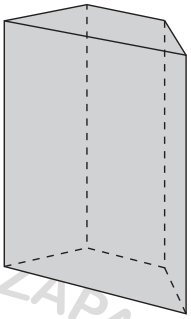
- **Tetraedro**: poliedro irregular con cuatro caras.
- **Pentaedro**: poliedro irregular con cinco caras.
- **Hexaedro**: poliedro irregular con seis caras.
- **Heptaedro**: poliedro irregular con siete caras.
- **Octaedro**: poliedro irregular con ocho caras.
- **Eneaedro**: poliedro irregular con nueve caras.
- **Decaedro**: poliedro irregular con diez caras.

Dos de las clases fundamentales de los **poliedros irregulares** son las **pirámides** y los **prismas.**



Seguidamente daremos más énfasis al estudio de dos tipos comunes de poliedros: el prisma y la pirámide.

PRISMA



Un **prisma** es un **poliedro** cuya superficie está formada por **dos caras iguales** y **paralelas** llamadas **bases** y por caras laterales (tantas como lados tienen las bases) que son **paralelogramos**.

Todas las **secciones** del prisma paralelas a las bases son **iguales**.

Tipos de prismas

Los prismas se pueden clasificar de acuerdo con cuatro criterios:

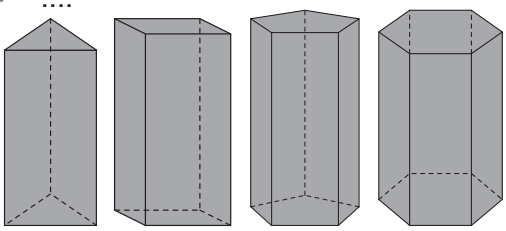
1. Número de lados de la base

Los prismas se clasifican según el número de lados que tienen sus bases:

- Prisma triángular: las bases son triángulos (3 lados).

MATEMÁTICA ZAPANDÍ
ICER
CONVENIO MEP • ICER

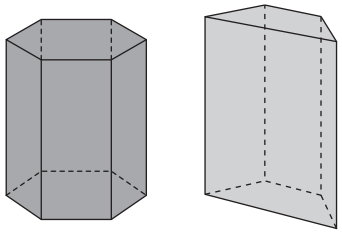
- Prisma cuadrangular: las bases son cuadriláteros (4 lados).
- Prisma pentagonal: las bases son pentágonos (5 lados).
- Prisma hexagonal: las bases son hexágonos (6 lados).
- ::::



Prisma Prisma Prisma Prisma

2. Regular o irregular

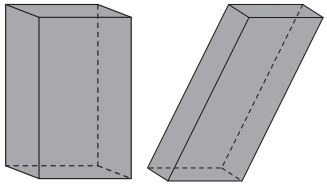
- **Prisma regular:** un prisma es regular si sus bases son *polígonos regulares*.
- **Prisma irregular**: los prismas son irregulares si tienen *polígonos irregulares* en su base**.**



Prisma regular Prisma irregular

3. Rectos u oblicuos

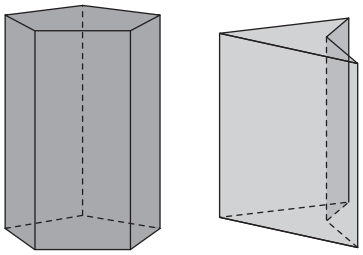
- **Prisma recto**: si los ejes de los polígonos de las bases son perpendiculares a las bases. Las caras laterales son cuadrados o rectángulos.
- **Prisma oblicuo**: es aquel cuyos ejes de los polígonos de las bases se unen por una recta oblicua a las bases mismas.



Prisma recto Prisma oblicuo

4. Convexo o cóncavo

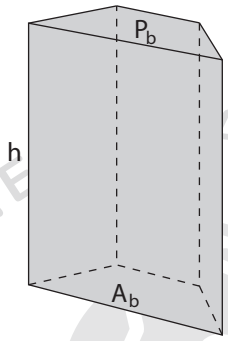
- **Prisma convexo**: el prisma es convexo si sus bases son polígonos convexos.
- **Prisma cóncavo**: el prisma cóncavo tiene como bases dos polígonos cóncavos iguales.



Prisma convexo Prisma cóncavo

Área del prisma

El **área de un prisma** es la suma del **área de las dos bases** (A_b) más el **área** de los paralelogramos de las **caras laterales** (en el prisma recto es el resultado de multiplicar el perímetro de la base (P_b) por la altura (*h*) del prisma que coincide con una arista lateral.



La **fórmula del área** del prisma recto es:

$$\text{Área} = 2 \cdot A_b + P_b \cdot h$$

donde $\mathbf{A_b}$ es el área de la base, $\mathbf{P_b}$ el perímetro de la base y **h** la altura

MATEMÁTICA ZAPANDÍ
CONVENIO MEP • ICER

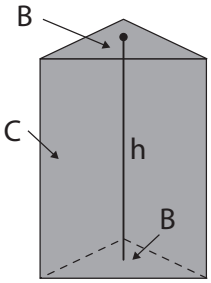
Área lateral y total de algunos prismas

A. Un prisma triangular regular

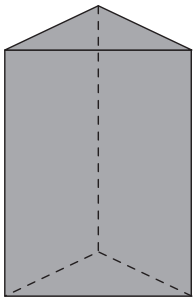
En un **prisma triangular** se pueden diferenciar los siguientes **elementos**:

- **Bases** (*B*): son dos **triángulos** paralelos e iguales.
- **Caras** (C): los tres **paralelogramos** de las caras laterales y las dos bases.

  Tiene cinco caras.
- **Altura** (*h*): distancia entre las dos bases del prisma.



Un **prisma triangular** regular es un poliedro cuya superficie está formada por dos *triángulos iguales* y *paralelos* llamados *bases* y por tres caras laterales que son rectángulos iguales.



Área de un prisma triangular regular

El área de las bases se calcula mediante la fórmula del área de **triángulo equilátero (A_b)**, mientras que el área lateral es el resultado de multiplicar el perímetro de la base **(P_b)** por la altura **(h)** del prisma.

Como resultado, se obtiene que el **área del prisma triangular regular** es:

$$\text{Área} = \ell \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ell + 3h \right)$$

(Siendo ℓ el lado del triángulo de la base y **h** la altura)

En el caso del **prisma recto** la longitud de la altura **h** y la de las aristas de las caras laterales coinciden.

Área de un prisma triangular irregular

El prisma triangular irregular tiene como bases dos triángulos que son equiláteros. Se pueden dar tres casos:

Las bases son triángulos isósceles.

Las bases son triángulos escalenos.

Las bases son triángulos rectángulos.

En los tres casos será necesario calcular el área del **triángulo** de una base (A_b), el perímetro de la misma (P_b) y la altura (h) del prima.

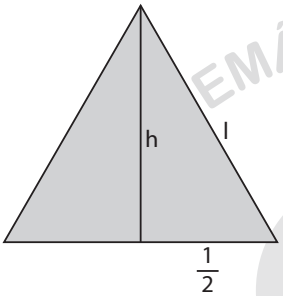
La fórmula de su área es:

$$\text{Área} = 2 \cdot A_b + P_b \cdot h$$

donde $\mathbf{A_b}$ es el área de la base, $\mathbf{P_b}$ es el perímetro de la base y **h** la altura.

Altura de un triángulo equilátero

Aplicando el teorema de Pitágoras podemos calcular la **altura**:



$$\ell^2 = h^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$\ell^2 = h^2 + \frac{\ell^2}{4} \leftrightarrow h^2 = \ell^2 - \frac{\ell^2}{4}$$

$$\sqrt{\ell^2 - \frac{\ell^2}{4}} \leftrightarrow h = \sqrt{\frac{4\ell^2 - \ell^2}{4}}$$

$$h = \sqrt{\frac{3\ell^2}{4}}$$

$$h = \frac{\sqrt{3}}{2}\ell$$

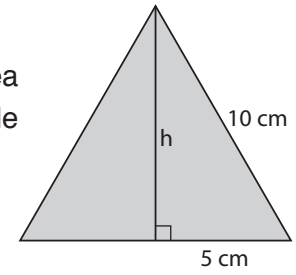
Área de triángulo equilátero

$$A = \frac{\text{base x altura}}{2} = \frac{\ell \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\ell}{\frac{2}{1}} = \ell^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}$$

EMÁTICA ZAPANDÍ
ICER
CONVENIO MEP • ICER

Ejemplo:

Calcular la altura y el área de un triángulo equilátero de 10 cm de lado.



▼ Para calcular la altura de un triángulo equilátero se hace uso de la expresión:

$$h = \frac{\sqrt{3}}{2}\ell$$

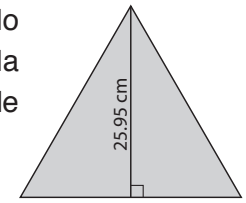
$$h = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 10 = \frac{10}{2} \cdot \sqrt{3} = 5\sqrt{3} \text{ cm}$$

▼ Para calcular el área de un triángulo equilátero se hace uso de la expresión: $A = \ell^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}$

$$A = \ell^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{100 \cdot 5\sqrt{3}}{2} = \frac{500\sqrt{3}}{2} = 250\sqrt{3} \text{ cm}^2$$

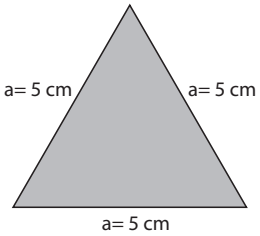
ACTIVIDAD

1. El perímetro de un triángulo equilátero mide 90 cm y la altura mide 25,95 cm. Calcule el área del triángulo.



Resp./

2. Calcular la altura y el área de un triángulo equilátero de 5 cm de lado.



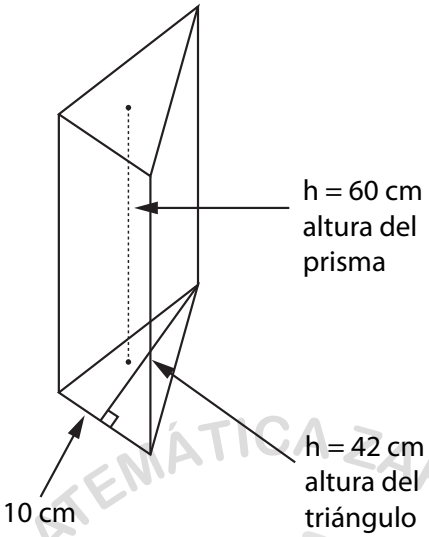
Resp./

3. En un triángulo equilátero de lado 8 cm, ¿cuál es la longitud de la altura correspondiente a cualquiera de sus lados?

Resp./

4. Hallar el área total de un prisma triangular cuya base es un triángulo equilátero que mide 10 cm de lado por 42 cm de altura del triángulo y la altura del prisma mide 60 cm.

Solución:



Obtengamos primero el **área lateral** ($Área_{lateral}$) (el de las tres caras):

$Área_{lateral}$ = perímetro de la base x altura del prisma

$Área_{lateral} = p_b$ x h

$Área_{lateral}$ = (10 cm + 10 cm + 10 cm) x 60 cm

$Área_{lateral}$ = 30 cm x 60 cm

$Área_{lateral}$ = 1800 cm^2

MATEMÁTICA EXPANDÍ
ICER
CONVENIO MEP • ICER

Y ahora el **área de las bases** ($Área_{base}$)

$$Área_{base} = 2 \cdot \left(\frac{10 \text{ cm} \times 42 \text{ cm}}{2} \right) = 2 \cdot \left(\frac{420 \text{ cm}^2}{2} \right)$$

$$= \frac{840 \text{ cm}^2}{2} = 420 \text{ cm}^2$$

Por último **sumaremos los valores del área lateral y del área de las dos bases** para obtener el área total del prisma triangular especificado.

$Área_{total} = Área_{lateral} + 2\ Área_{base}$

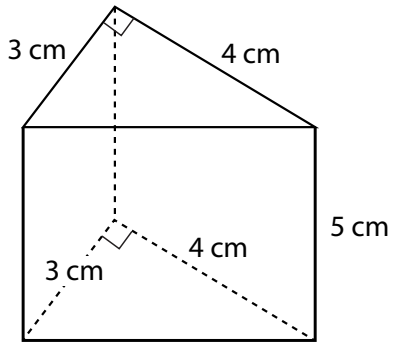
$Área_{total} = 1800 \text{ cm}^2 + 420 \text{ cm}^2$

$Área_{total} = 2200 \text{ cm}^2$

Respuesta: El área total del triángulo es 2200 cm^2.

5. Un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 3 cm y 4 cm es la base de un prisma recto. Si la altura del prisma mide 5 cm. Hallar el área lateral y total del prisma.

Solución:



Obtengamos primero el **área lateral** ($Área_{lateral}$) de las tres caras

Para encontrar el área lateral necesitamos hallar **el perímetro** de la base que en este caso es un triángulo rectángulo de medida de los catetos 3 cm y 4 cm, falta hallar la hipotenusa.

Mediante el teorema de Pitágoras $a^2 + b^2 = c^2$, la encontramos:

$a^2 + b^2 = c^2$

$(3 \text{ cm})^2 + (4 \text{ cm})^2 = c^2$

$9 \text{ cm}^2 + 16 \text{ cm}^2 = c^2$

$\sqrt{25 \text{ cm}^2} = c$

$5 \text{ cm} = c$

$Área_{lateral}$ = perímetro de la base x altura del prisma

$Área_{lateral} = (3 \text{ cm} + 4 \text{ cm} + 5 \text{ cm}) \times 5 \text{ cm}$

$Área_{lateral} = 12 \text{ cm} \times 5 \text{ cm}$

$Área_{lateral} = 60 \text{ cm}^2$

Y ahora el **área de las bases** ($Área_{base}$), en este caso la base es un triángulo rectángulo de catetos 3 cm y 4 cm los cuales corresponden uno, a la base y el otro a la altura.

$$Área_{base} = 2 \cdot \left(\frac{3 \text{ cm} \times 4 \text{ cm}}{2} \right) = 2 \cdot \left(\frac{12 \text{ cm}^2}{2} \right)$$

$$= \frac{24 \text{ cm}^2}{2} = 12 \text{ cm}^2$$

Para hallar el área total del prisma sumamos **los valores del área lateral y del área de las dos bases**.

$Área_{total} = Área_{lateral} + 2\ Área_{base}$

$Área_{total} = 60 \text{ cm}^2 + 12 \text{ cm}^2$

$Área_{total} = 72 \text{ cm}^2$

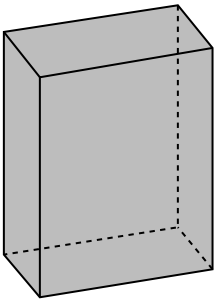
Respuesta: El área total del prisma triangular es 72 cm^2.

B. Prisma rectangular (ortoedro)

Un **prisma rectangular** (u ortoedro) es un poliedro cuya superficie está formada por **dos rec-**

MATEMÁTICA ITAGÜÍ ICER CONVENIO MEN-ICER

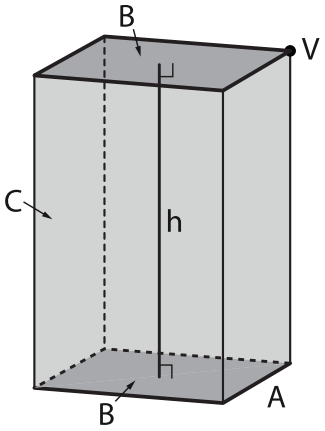
tángulos iguales y **paralelos** llamados **bases** y por cuatro caras laterales que son también rectángulos paralelos e iguales dos a dos.



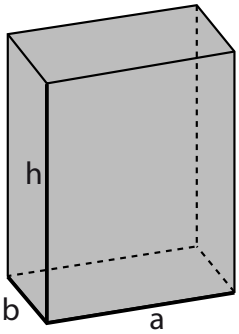
El **ortoedro** es un prisma recto y también un caso particular de **prisma cuadrangular irregular**.

Elementos del prisma cuadrangular

En un prisma cuadrangular se pueden diferenciar los siguientes elementos:



- **Bases** (*B*): son dos cuadriláteros paralelos e iguales.
- **Caras** (*C*): los cuatro paralelogramos de las caras laterales y las dos bases. Por lo tanto, tiene seis caras.
- **Altura** (*h*): distancia entre las dos bases del prisma. En el caso del prisma recto la longitud de la altura h y la de las aristas de las caras laterales coinciden.



Área del prisma rectangular

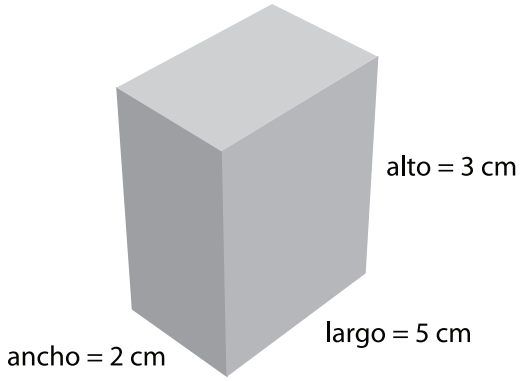
Su **área total** se calcula por la siguiente fórmula:

$$\text{Área} = 2 \cdot (a \cdot b + a \cdot h + b \cdot h)$$

siendo **a** y **b** los costados diferentes de la base y **h** la altura

Ejemplos

1. Calcule el área total de un prisma rectangular de 5 cm de largo, 3 cm de ancho y 2 cm de alto.



Solución:

A = 2 • (largo x ancho) + 2 • (largo x altura) + 2 • (ancho x altura)

A = 2 • (l • a) + 2 • (l • h) + 2 • (a • h)

A = 2 • (5 cm • 2 cm + 5 cm • 3 cm + 2 cm • 3 cm)

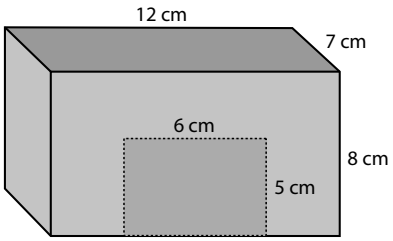
A = 2 • (10 cm^2 + 15 cm^2 + 6 cm^2)

A = 2 • 31 cm^2

A = 62 cm^2

MATEMÁTICA ZAPANDÍ
ICER
CONVENIO MEP • ICER

2. David desea construir una jaula (hogar) para un hamster con las medidas indicadas en la figura siguiente, ¿Cuánta madera de forro se necesita para construirla, si se desea dejar una puerta abierta para la jaula y además, estará sobre el suelo y solo se tapará por encima?



Solución:

Debemos hallar el área total para calcular la madera de forro sin incluir el fondo, esta estará sobre el suelo.

A = 2 • (largo x ancho) + 2 • (largo x altura) + 2 • (ancho x altura)

Sin fondo

A = 1 • (l • a) + 2 • (l • h) + 2 • (a • h)

A = 2 • (12 cm •7 cm) + 2 • (12 cm • 8 cm) + 2 • (7 cm • 8 cm)

A = 84 cm^2 + 192 cm^2 + 112 cm^2

A = 388 cm^2

Recordemos que debemos excluir el área de la puerta

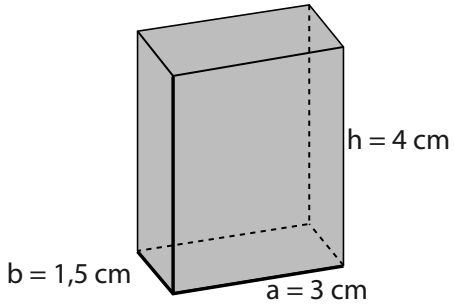
A_{puerta} = 6 cm x 5 cm = 30 cm^2

Luego, tenemos que la madera de forro queda determinada por el área total de la jaula (hogar) sin tomar en cuenta el área de la puerta.

A_{total} = 388 cm^2 – 30 cm^2 = 358 cm^2

Respuesta: Se necesita 358 cm^2 de madera de forro.

3. Halle el área total de un prisma rectangular recto, sabiendo que los lados contiguos de la base miden de largo a = 3 cm, de ancho b = 1,5 cm y de altura h = 4 cm.



Solución:

Su área se calcula mediante la suma de los seis rectángulos de su superficie, que al ser iguales dos a dos, será el doble de la suma de los tres rectángulos diferentes.

Área = 2 • (a • b + a • h + b • h)

= 2 • (3 • 1,5 + 3 • 4 + 1,5 • 4)

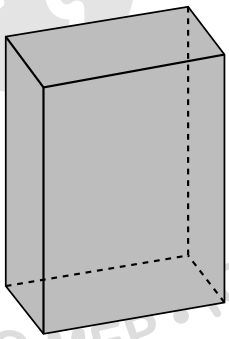
= 2 • (4,5 cm^2 + 12 cm^2 + 6 cm^2)

= 2 • 22,5 cm^2 = 45 cm^2

Respuesta: El **área** de este **prisma rectangular** es de **45 cm^2**.

C. PRISMA CUADRANGULAR

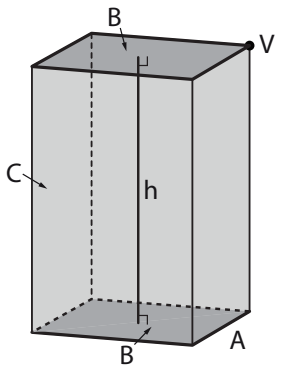
Un **prisma cuadrangular** es un poliedro cuya superficie está formada por **dos** cuadrados y **paralelos** llamados **bases** y por cuatro caras laterales que son **paralelogramos**.



MATEMÁTICA ZAPANDÍ
CONVENIO MEP - CICER

Elementos del prisma cuadrangular

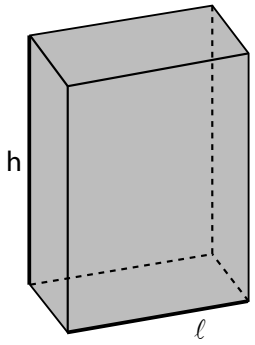
En un **prisma cuadrangular** se pueden diferenciar los siguientes **elementos**:



- **Bases** (B): son dos cuadrados paralelos e iguales.
- **Caras** (C): los cuatro paralelogramos de las caras laterales y las dos bases. Por lo tanto, tiene seis caras.
- **Altura** (h): distancia entre las dos bases del prisma. En el caso del prisma recto la longitud de la altura h y la de las aristas de las caras laterales coinciden.
- **Vértices** (V): los ocho puntos donde confluyen tres caras del prisma.
- **Aristas** (A): segmentos donde se encuentran dos caras del prisma.

Área de un prisma cuadrangular regular

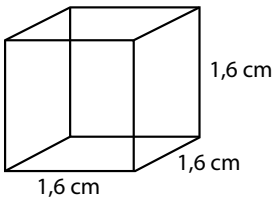
El área de las bases se calcula mediante la fórmula del área del cuadrado (A_b), mientras que el área lateral es el resultado de multiplicar el perímetro de la base (P_b) por la altura (h) del prisma. Como resultado, se obtiene que el **área del prisma cuadrangular regular** será:



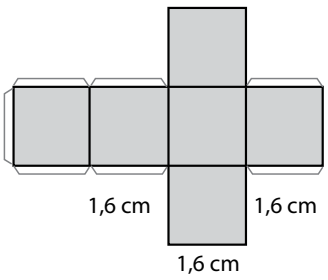
$$\text{Área} = 2 \cdot A_b + P_b \cdot h = 2 \cdot \ell^2 + 4 \cdot \ell \cdot h$$

Ejemplos

Un cubo se puede decir que es un prisma rectangular.



1. Calcule el área total de un cubo cuya arista mide 1,6 cm.



Solución:

El cubo es un prisma cuadrangular donde el largo, el ancho y la altura es de 1,6 cm

El área de las bases de este cubo se calcula mediante la fórmula del área del cuadrado (A_b), mientras que el área lateral es el resultado de multiplicar el perímetro de la base (P_b) por la altura (h) del prisma. Como resultado, se obtiene que el **área del cubo.**

$$\text{Área}_{total} = 2 \cdot A_b + P_b \cdot h = 2 \cdot \ell^2 + 4 \cdot \ell \cdot h$$

$$\text{Área}_{total} = 2 \cdot (1{,}6\ \text{cm})^2 + (1{,}6\ \text{cm} + 1{,}6\ \text{cm} + 1{,}6\ \text{cm} + 1{,}6\ \text{cm}) \cdot 1{,}6\ \text{cm}$$

$$\text{Área}_{total} = 2 \cdot 2{,}56\ \text{cm}^2 + 6{,}4\ \text{cm} \cdot 1{,}6\ \text{cm}$$

$$\text{Área}_{total} = 5{,}12\ \text{cm}^2 + 10{,}24\ \text{cm}^2$$

$$\text{Área}_{total} = 15{,}36\ \text{cm}^2$$

Respuesta: El área total es de 15,36 cm^2.

MATEMÁTICA ZAPANDÍ
ICER
CONVENIO MEP • ICER

2. Halle el área lateral de un prisma cuadrilátero regular recto, sabiendo que el lado de la base mide 6 cm y su arista lateral 12 cm.

Solución:

Lado de la base: ℓ = 6 cm

Altura: arista lateral: h = 12 cm

El área lateral de un prisma cuadrilátero regular, esto es, de un prisma cuadrangular se obtiene multiplicando el perímetro de la base perímetro ($P = 4 \cdot \ell = \ell + \ell + \ell + \ell$) y la altura es la arista lateral (h) del prisma, por lo tanto

Área lateral = $P_b \cdot h$

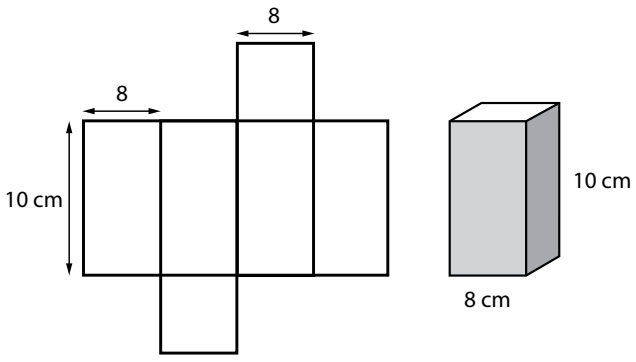
= (6 cm + 6 cm + 6 cm + 6 cm) • 12 cm

= 24 cm • 12 cm

= 288 cm^2

Respuesta: El área lateral es de 288 cm^2.

3. En un prisma cuadrado regular recto, el lado de la base mide 8 cm, si la arista lateral mide 10 cm ¿cuál es el valor del área total?



Solución

Lado de la base: ℓ = 8 cm

Altura de la pirámide: h = 10 cm

Calculemos el área lateral.

Área lateral: $P_b \cdot h$

Área lateral = (4 • 8 cm) • 10 cm

= 32 cm • 10 cm

= 320 cm^2

Calculemos el área basal.

Área basal: ℓ^2

Área basal = $2 \cdot \ell^2$

= $2 \cdot (8\ cm)^2$

= $2 \cdot 64\ cm^2$

= 128 cm^2

Área total = **Área lateral + Área basal**

Área total = 320 cm^2 + 128 cm^2

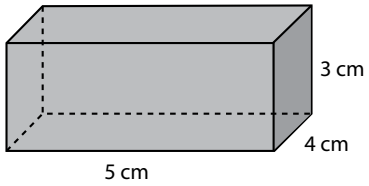
= 448 cm^2

El área total es de 448 cm^2.

MATEMÁTICA ZAPANDÍ
ICER
CONVENIO MEP • ICER

TRABAJO INDIVIDUAL 1

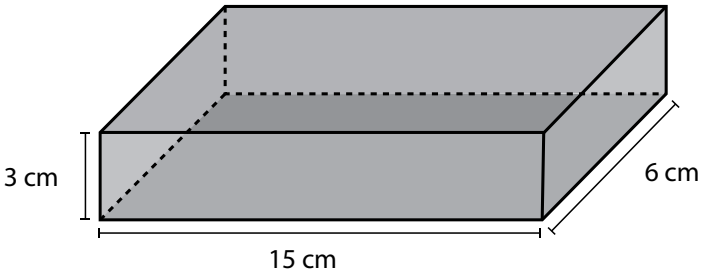
1. Una piscina tiene 5,0 m de largo, 4,0 m de ancho y 3,0 m de profundidad. Si se desea cubrir su superficie con azulejos cuadrados de 25 cm de lado, ¿cuántos azulejos se necesitarán?



Respuesta:

2. Cada año, el tío de José Ángel vacía, desinfecta y pinta el fondo y las paredes de la alberca de su casa para darle mantenimiento.

   Si las dimensiones de la alberca son 15 m de largo, 6 m de ancho y 3 m de profundidad, ¿cuál es el área total que pinta?



Respuesta:

3. Calcular el área lateral y el área total de un prisma de base cuadrada de 36 cm de altura y de 21 cm de arista de la base.

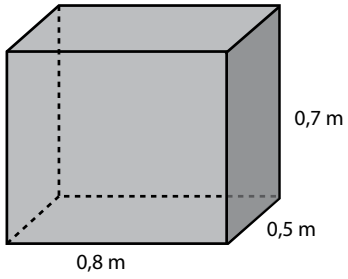
Respuesta:

MATEMÁTICA ZAPANDÍ
ICER
CONVENIO MEP • ICER

4. Calcular el área lateral y el área total de un prisma de base un triangulo equilátero de 25 cm de arista y de 40 cm de altura.

Respuesta:

5. ¿Cuál es el precio de un cajón de embalaje de 0,8 m x 0,5 m x 0,7 m, si la madera cuesta a razón de 1600 colones el m2?



Respuesta:

6. Un prisma de base triangular de 6 cm de lado y una altura de 12 cm., ¿qué superficie total tiene?

Respuesta:

7. Calcula el área total de un prisma de base cuadrada cuyo lado es de 2 cm. La altura del prisma es 5 cm.

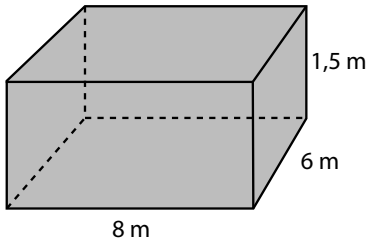
Respuesta:

8. Calcular el área lateral y el área total de un prisma triangular de 40 centímetros de altura y 25 centímetros de arista de la base.

Respuesta:

MATEMÁTICA ZAPANDÍ
ICER
CONVENIO MEP • ICER

9. Una piscina tiene 8 m de largo, 6 m de ancho y 1,5 m de profundidad. Se pinta la piscina a razón de ¢6000 el metro cuadrado. ¿Cuánto costará pintarla?



Respuesta:

10. ¿Cuántas piezas de cerámica cuadradas de 20 cm de lado se necesitan para recubrir las caras de una piscina de 10 m de largo por 6 m de ancho y de 3 m de profundidad?

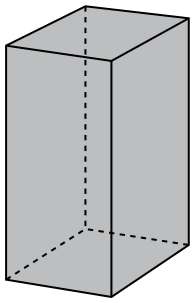
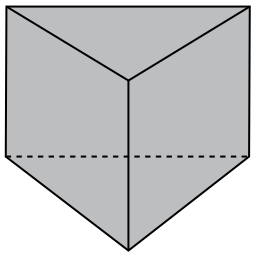
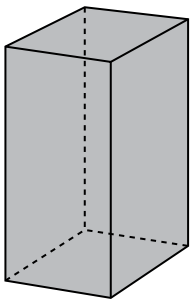
Respuesta:

11. Halle el área de un prisma triángular, es decir, la base es un triángulo equilátero, regular, de arista básica 5 cm y 16,5 cm de altura del prisma.

Respuesta:

MATEMÁTICA ZAPANDÍ
ICER
CONVENIO MEP • ICER

B. Para cada uno de los siguientes casos complete la información indicada:

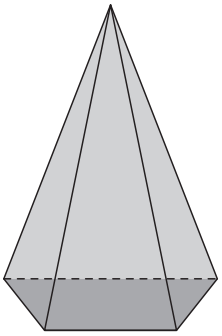
1	 Alto = 20 cm Ancho = 15 cm Largo = 10 cm	Área lateral: Área de las bases: Área total:
2	 Altura = 20 cm Arista de la base = 15 cm	Área lateral: Área de las bases: Área total:
3	 Altura = 20 cm Arista de la base = 5 cm	Área lateral: Área de las bases: Área total:

MATEMÁTICA ZAPANDÍ
ICER
CONVENIO MEP • ICER

PIRÁMIDE

Una **pirámide** es un **poliedro** cuya superficie está formada por una **base** que es un polígono cualquiera y **caras laterales triangulares** que confluyen en un vértice que se denomina **ápice** (o vértice de la pirámide).

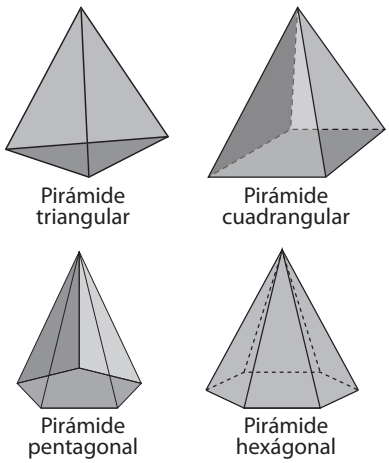
Las pirámides tienen tantos triángulos en las caras laterales como lados tiene la base.



Tipos de pirámides

Las pirámides se pueden clasificar de acuerdo a cuatro criterios:

1. Las pirámides se denominan en función del polígono que tengan como base.

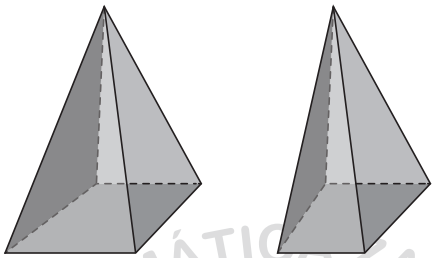


De esta manera tenemos:

- **Pirámide triangular:** su base es un triángulo (3 lados), al igual que sus caras laterales.
- **Pirámide cuadrangular:** su base es un cuadrado (4 lados), al igual que sus caras laterales.
- **Pirámide pentagonal:** su base es un pentágono (5 lados), al igual que sus caras laterales.
- **Pirámide hexagonal:** su base es un hexágono (6 lados), al igual que sus caras laterales.
- ::::

2. Las pirámides, según su base, pueden ser regulares o irregulares.

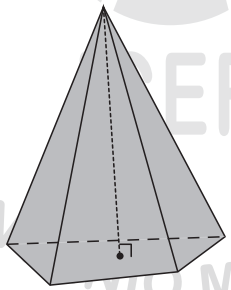
- **Pirámide regular:** la base es un polígono regular y las caras laterales son triángulos isósceles.
- **Pirámide irregular:** cuando tiene por base un polígono irregular.



3. Pirámide recta u oblicua

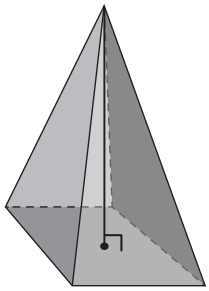
- **Pirámide recta:** cuando su altura o eje cae en el punto medio de su base, además las caras laterales son triángulos isósceles.

El eje es perpendicular al polígono base.



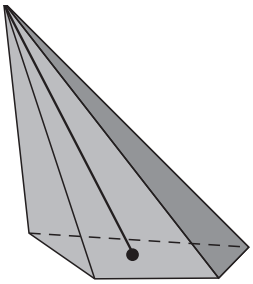
MATEMÁTICA APANDÍ
CONMIGO MEP • ICER

- **Pirámide regular recta:** La base es un polígono regular y el eje es perpendicular a un polígono base.

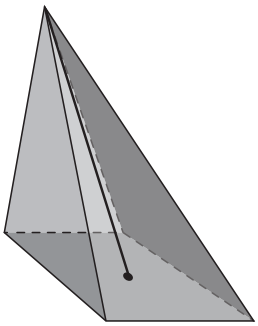


- **Pirámide oblicua**: cuando su altura o eje no cae en el punto medio de su base, además alguna de las caras laterales no es un triángulo isósceles.

  El eje no es perpendicular a un polígono base.

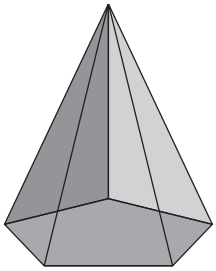


- **Pirámide regular oblicua**: La base es un polígono regular y el eje no es perpendicular al polígono base.



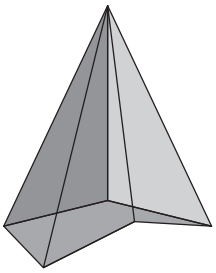
4. Pirámide convexa o cóncava

- **Pirámide convexa**: cuando la base es un polígono convexo.



Pirámide convexa

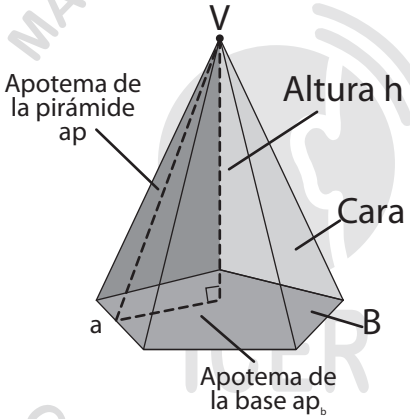
- **Pirámide cóncava**: cuando la base es un polígono cóncavo.



Pirámide cóncava

Elementos de la pirámide

En una **pirámide** se pueden diferenciar los siguientes **elementos**:



- **Base** (B): polígono cualquiera. Es la única cara que no toca al vértice de la pirámide.

MATEMÁTICA ZAPANDÍ
CONVENIO MEP • ICER

- **Caras** (C): los triángulos de los laterales y la base.
- **Aristas** (a): segmentos donde se encuentran dos caras de la pirámide. Podemos distinguir: aristas laterales, que son las que llegan al vértice (o ápice) y aristas básicas, que están en la base.
- **Altura** (h): distancia del plano de la base al vértice de la pirámide.
- **Vértice de la pirámide** (V): punto donde confluyen las caras laterales triangulares. También se llama **ápice**.
- **Apotema de la pirámide** (ap): distancia del vértice a un lado de la base.

Solo existe en las pirámides regulares.

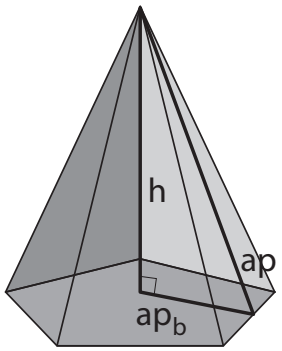
Puesto que en este caso las caras laterales son isósceles, **la apotema de la pirámide** es también la **altura de las caras laterales**.

Apotema de la base (ap_b): distancia de un lado de la base al centro de ésta.

Solo existe en las pirámides regulares.

Apotema de la pirámide

La **apotema de la pirámide** es la distancia del ápice a un lado de la base. Solo existe en las pirámides regulares.



En las pirámides regulares, la altura (h), la apotema de la base (ap_b) y la apotema de la pirámide (ap) forman un triángulo rectángulo. Por el **teorema de Pitágoras**, conociendo la altura (h) y la apotema de la base (ap_b) podemos calcular la **apotema**:

$$ap = \sqrt{h^2 + ap_b^2}$$

siendo **h** la altura, $\mathbf{ap_b}$ la apotema de la base y **ap** la apotema de la pirámide

MATEMÁTICA ZAPANDÍ
ICER
CONVENIO MEP • ICER